$alpha$-determinantal point field associated with green kernel (Symposium on Probability Theory)

AUTHOR(S):

白井, 朋之

数理解析研究所講究録
第1903巻 2014年 168-176

α-determinantal point field associated with green kernel

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所 白井朋之
Tomoyuki Shirai
Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

1 α-行列式と α-行列式点過程

1.1 はじめに

α-行列式点過程は行列式点過程 (determinantal point field, determinantal point process) に 1-パラメータを導入して拡張される "点過程" である. 配置空間上の確率測度 (行列式点過程) のラプラス変換にパラメータを導入して逆に測度を定義するため, その測度は一般には符号付き測度となる. その符号付き測度が確率測度になるための条件を考察すると, 行列式の一般化である α-行列式と呼ばれる行列変数関数があらわれ, 正値積分核に対する α-行列式の正値性の問題が本質的となる. 正値性に関する話題は別の機会に触れることにし (e.g. [4]), 本稿では, 正値性が自明に成り立つグリーン核の場合に, α-行列式点過程がループ空間上の σ-有限測度を intensity 測度とするポアソン点過程により表現できることを示す. さらに, パラメータ $\alpha > 0$ の逆数を時間とみなすと, 無限分解可能性から時空間ポアソン点過程による表現も可能であることを述べる.

1.2 点過程と相関関数

S は局所コンパクトで可算開基をもつ Hausdorff 空間とする. S 上の非負整数値 Radon 測度の全体を $Q(S)$ とあらわし, S 上の配置空間とよぶ. $Q(S)$ の元は δ-測度の和

$$\xi \in Q(S) \Longleftrightarrow \xi = \sum_i \delta_{x_i} \quad (x_i \in S)$$

で表現される. コンパクト台をもつ連続関数 $f : S \to \mathbb{R}$ (その全体を $C_c(S)$ と書く) に対して

$$\langle \xi, f \rangle = \sum_i f(x_i)$$

とする. $\xi, \xi_n \in Q(S), n = 1, 2, \dots$ に対して, $\langle \xi_n, f \rangle \to \langle \xi, f \rangle$ $(\forall f \in C_c(S))$ となるとき ξ_n は ξ に漠収束するという. $Q(S)$ にはこの収束によって定まる漠位相を入れる. 漠位相に関する位相的 σ-加法族を $\mathcal{B}(Q(S))$ として, $Q(S)$-値確率変数 $\xi(\omega)$ を S 上の点過程という. 本稿では, $\xi(\omega)$ の $Q(S)$ 上の分布も点過程とよぶことにする. (つまり, $Q(S)$ 上の Borel 確率測度 μ も点過程とよぶ.)

RIMS 研究集会「確率論シンポジウム」, Dec. 17-20, 2013

点過程 μ はラプラス変換

$$\mathscr{L}_\mu(f) = E_\mu\big[\exp(-\langle \xi, f\rangle)\big] \quad (f \in C_c^+(S))$$

によって一意的に定まり，点過程の弱収束することとラプラス変換が各 $f \in C_c^+(S)$ に対して収束することは同値になる．ここで，$C_c^+(S)$ は $C_c(S)$ の元で非負関数であるものの全体．

S 上の reference 測度 λ を一つ固定する．点過程 μ に対して

$$E_\mu[\sum_{\substack{x_1,\dots,x_n\in\xi\\ \text{distinct}}} \delta_{(x_1,\dots,x_n)}] = \lambda_n$$

と定義される S^n 上の Radon 測度 λ_n が存在するとき n 次相関測度といい，$\lambda^{\otimes n}$ に関して絶対連続のとき Radon-Nikodym 密度 $\rho_n = \frac{d\lambda_n}{d\lambda^{\otimes n}}$ を n 次相関関数とよぶ．

1.3 点過程の例

1.3.1 ポアソン点過程

S 上の Radon 測度 ν を intensity 測度とするポアソン点過程 Π_ν は以下のラプラス変換によって特徴付けられる：

$$\mathscr{L}_{\Pi_\nu}(f) = E_{\Pi_\nu}\big[\exp(-\langle \xi, f\rangle)\big] = \exp\left(-\int_S (1-e^{-f(x)})\nu(dx)\right) \quad f \in C_c^+(S). \tag{1}$$

また，このとき ν が λ に関して絶対連続ならば，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して n 次相関関数が存在して，$\rho_n(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{d\nu}{d\lambda}(x_i)$ となる．

1.3.2 行列式点過程

S 上の Radon 測度 ν と積分作用素 $\mathcal{K}$ が以下の条件をみたすとする．

- $\mathcal{K}$ は $L^2(S,\nu)$ 上の自己共役な積分作用素で局所トレース族[*1]．
- $\mathcal{K}$ は連続な積分核 $K(x,y)$ をもち，$O \le \mathcal{K} \le I$ をみたす．

このとき，(ν, K) に対してラプラス変換が

$$\mathscr{L}_{\mu_K^{(-1)}}(f) = E_{\mu_K^{(-1)}}\big[\exp(-\langle \xi, f\rangle)\big] = \det\big(I - \mathcal{K}(1-e^{-f})\cdot\big)$$

によって与えられる点過程が一意的に存在する．$\mu_K^{(-1)} = \mu_{\nu,K}^{(-1)}$ を S 上の行列式点過程という．(-1) は後に定義する $\mu_K^{(\alpha)}$ の $\alpha = -1$ の場合を意味する．また，相関関数は

$$\rho_n(x_1,\dots,x_n) = \det(K(x_i,x_j))_{i,j=1}^n$$

によって与えられる．これが，行列式点過程の名前の由来である．

[*1] ここで，$\mathcal{K}$ が局所トレース族であるとは，任意のコンパクト集合 A への $\mathcal{K}$ の制限がトレース族になるときをいう．

1.3.3 パーマネント点過程

S 上の Radon 測度 ν と積分作用素 $\mathcal{K}$ が以下の条件をみたすとする.

- $\mathcal{K}$ は $L^2(S,\nu)$ 上の自己共役な積分作用素で局所トレース族.
- $\mathcal{K}$ は連続な積分核 $K(x,y)$ をもち，$\mathcal{K} \geq O$ をみたす.

このとき，(ν, K) に対して，ラプラス変換が

$$\mathscr{L}_{\mu_K^{(1)}}(f) = E_{\mu_K^{(1)}}\left[\exp(-\langle \xi, f\rangle)\right] = \det\left(I + \mathcal{K}(1-e^{-f})\cdot\right)^{-1}$$

によって与えられる点過程が一意的に存在する．これを，S 上のパーマネント点過程 $\mu_K^{(1)} = \mu_{\nu,K}^{(1)}$ とよぶ．また，相関関数は

$$\rho_n(x_1,\ldots,x_n) = \mathrm{per}(K(x_i,x_j))_{i,j=1}^n$$

によって与えられる.

1.4 α-行列式点過程

前節と同様な ν, K に関する適当な条件のもと，連続積分核 $K(x,y)$ をもつ積分作用素 $\mathcal{K}$ に対してラプラス変換

$$\mathscr{L}_{\mu_K^{(\alpha)}}(f) = E_{\mu_K^{(\alpha)}}\left[\exp(-\langle \xi, f\rangle)\right] = \det\left(I + \alpha\mathcal{K}(1-e^{-f})\cdot\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad f \in C_c^+(S).$$

を考える．この関係式により $Q(S)$ 上の符号付き測度 $\mu_K^{(\alpha)}$ が定まるが，特に $\mu_K^{(\alpha)}$ が確率測度となるとき，α-行列式点過程とよぶ．$\alpha = -1$ のときは行列式点過程，$\alpha = 1$ のときはパーマネント点過程，$\alpha \to 0$ ではポアソン点過程に対応する.

α-行列式点過程が存在すれば，n 点相関関数は

$$\rho_n(x_1,\ldots,x_n) = \det{}_\alpha(K(x_i,x_j))_{i,j=1}^n$$

で与えられる ([5])．ただし，$\det_\alpha A$ は次節で定義される α 行列式である.

例 1. $S = \{x\}$ のとき，$Q(S) \cong \{0,1,2,\ldots\}$ となる．$K > 0,\ f \geq 0$ に対して，ラプラス変換は以下の一般化二項展開をもつ：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mu_K^{(\alpha)}}(f) &= (1+\alpha K(1-e^{-f}))^{-1/\alpha} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(1+\alpha K)^{-1/\alpha}\frac{(1+\alpha)\cdots(1+(n-1)\alpha)J_\alpha^n}{n!}e^{-nf}.\end{aligned}$$

ただし，$J_\alpha = \alpha K(1+\alpha K)^{-1}$．よって，

$$\mu_K^{(\alpha)}(\xi(\{x\}) = n) = (1+\alpha K)^{-1/\alpha}\frac{(1+\alpha)\cdots(1+(n-1)\alpha)J_\alpha^n}{n!}$$

なる符号付き測度を定める．$\alpha < 0$ の場合は，$\alpha = -1/n$ でなければ十分大きい n で $\mu_K^{(\alpha)}(\xi(\{x\}) = n) < 0$ となるものが存在するので，$\alpha < 0$ に対して $\mu_K^{(\alpha)}$ が確率測度になるためには $\alpha = -1/n (n \in \mathbb{N})$ が必要．またこのとき，$\mu_K^{(\alpha)}$ は確率測度となり，$\operatorname{supp} \mu_K^{(\alpha)} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ となる．$\alpha > 0$ のときは，ラプラス変換は負の二項分布に対応するので，$\alpha > 0$ ならば常に確率測度となる．

注意． (i) 例 1 より，行列式点過程やパーマネント点過程のように一般の作用素 $\mathcal{K}$ に対して α-行列式点過程が定義できるためには，$\alpha \in \{-1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup (0, \infty)$ が必要であることがわかる．
(ii) 行列式点過程はベルヌイ確率変数の，パーマネント点過程は幾何確率変数の，α-行列式点過程は (存在すれば) 負の二項分布をもつ確率変数の点過程への一般化とみなせる．

1.5 α-行列式

n 次正方行列 A に対して α-行列式は

$$\det_\alpha A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \alpha^{d(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

と定義される．ただし，

$$d(\sigma) = \min\{j \geq 1 \ : \ \sigma = \tau_1 \cdots \tau_j,\ \tau_i \text{ は互換}\}, \quad d(id) = 1$$

と定義される．$d(\sigma)$ は類関数で，置換 σ を互換の積であらわすために必要な最小の互換の個数である．

例 2. $\mathcal{S}_3$ に対する $d(\sigma)$ は

	id	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
$d(\sigma)$	0	1	1	1	2	2

によって与えられるので，3×3 行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3$ に対する α-行列式は

$$\det_\alpha A = a_{11}a_{22}a_{33} + (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33})\alpha + (a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})\alpha^2$$

となる．一般に，n 次行列 A に対する $\det_\alpha A$ は α の $(n-1)$ 次多項式となる．

Hadamard-Fischer の不等式, Marcus-Lieb の不等式によって，$A \succeq O$ ならば

$$\operatorname{per} A \geq \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \geq \det A \geq 0 \Longleftrightarrow \det_1 A \geq \det_0 A \geq \det_{-1} A \geq 0$$

となることが知られている．先に述べたように，α-行列式点過程の (符号付き測度の) 相関関数は $\det_\alpha K$ で与えられるので，$A \succeq O$ に対して $\det_\alpha A \geq 0$ かどうかという正値性の問題が，$\mu_K^{(\alpha)}$ が確率測度になるための条件と密接に関連することがわかる．

α-行列式の正値性の問題については，[3, 4, 5] などを参照のこと．

2 Green kernel に対する α-行列式点過程

この節の設定や詳しい loop 測度の性質は Le Jan [2], Sznitman [6] を参照のこと.

2.1 設定

(S,E) は有限グラフで S は点集合, E は辺集合とする. $c_{x,y}=c_{y,x}>0$ は辺上に与えられたウェイトで, $xy\notin E$ のときは $c_{x,y}=0$ であるとする. $\kappa_x\geq 0$ は消滅測度で S 上少なくとも一点では正とする. $\lambda_x=\sum_y c_{x,y}+\kappa_x$ とおき, 劣マルコフ核 $p_{xy}=\frac{c_{x,y}}{\lambda_x}$ を考える. (劣) マルコフ推移行列 $P=(p_{xy})_{x,y\in S}$ に対して, $P-I$ を生成作用素とする連続時間マルコフ連鎖を $(\{X_t\}_{t\geq 0},\{\mathbb{P}_x\}_{x\in S})$ とする. この連続時間マルコフ連鎖に対して, 対称化されたグリーン関数

$$g(x,y)=\mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty I(X_t=y)dt\right]\frac{1}{\lambda_y}\in(0,\infty)\quad(\forall x,y\in S)\tag{2}$$

が定義される.

2.2 ループ空間上の σ-有限測度 μ^{loop}

S 上の (右連続) ループ空間を

$$\Gamma=\bigsqcup_{t>0}\Gamma_t,\quad \Gamma_t=\{\gamma:[0,t]\to S;\gamma(0)=\gamma(t),\text{right-conti.}\}$$

と定義する. $\gamma\in\Gamma$ に対して $\gamma\in\Gamma_t$ で一意的に定まる t を duration といい, $\tau(\gamma)$ とあらわす. $X_s(\gamma)=\gamma(s),s\in[0,\tau(\gamma)]$ を座標写像とし, $\{X_s:\Gamma_1\to S,\ s\in[0,1]\}$ によって生成される Γ_1 上の σ-加法族を考えて, Γ 上には写像

$$(w,t)\in\Gamma_1\times(0,\infty)\mapsto\gamma(\cdot):=w\left(\frac{\cdot}{t}\right)\in\Gamma$$

によって $\Gamma_1\times(0,\infty)$ 上の自然な積 σ-加法族から誘導される σ-加法族 $\mathcal{F}_\Gamma$ を考える.

$(\Gamma,\mathcal{F}_\Gamma)$ 上の σ-有限測度を

$$\mu^{loop}(B)=\sum_{x\in S}\lambda_x\int_0^\infty P_{x,x}^t(B)\frac{dt}{t}\tag{3}$$

と定義する. ただし, 可測集合 $B\in\mathcal{F}_\Gamma$ に対して

$$P_{x,y}^t(B)=\mathbb{P}_x(B\cap\{X_t=y\})\frac{1}{\lambda_y}\quad(x,y\in S)$$

である.

以下は, μ^{loop} のいくつかの性質である.

- σ-有限性: $t \to 0$ で $\mathbb{P}_x(X_t = x) > 0$ であることより,

$$\mu^{loop}(\Gamma) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \sum_{x \in S} \mathbb{P}_x(X_t = x) = \infty$$

に注意する. また, (2), (3) より

$$\mu^{loop}(\tau(\gamma) \geq \ell) \leq \frac{1}{\ell} \sum_{x \in S} g(x,x)\lambda_x < \infty \quad (\forall \ell > 0)$$

- 制限性：U を S の任意の部分集合とする. S を U に置きかえることにより, S とは無関係に μ_U^{loop} が μ^{loop} と同様に定義される. このとき,

$$1_{\Gamma_U} \cdot \mu^{loop} = \mu_U^{loop}.$$

ただし, $\Gamma_U = \{\gamma \in \Gamma; (\gamma_s)_{0 \leq s \leq \tau(\gamma)} \subset U\}$.

- Feynman-Kac 型公式：$x \in S$ における $\gamma \in \Gamma$ の局所時間を

$$L_x(\gamma) := \int_0^{\tau(\gamma)} I(X_s(\gamma) = x) ds \cdot \frac{1}{\lambda_x}$$

とする. $V : S \to [0,\infty)$ に対して $\Phi_V : \Gamma \to [0,\infty)$ を

$$\Phi_V(\gamma) := \sum_{x \in S} V(x) L_x(\gamma) = \int_0^{\tau(\gamma)} V(X_s(\gamma)) ds \cdot \frac{1}{\lambda_{X_s(\gamma)}}$$

と定義すると,

$$\int_\Gamma (1 - e^{-\Phi_V(\gamma)}) \mu^{loop}(d\gamma) = \log \det(I + GV) \tag{4}$$

ただし, $G = (-L)^{-1} = (\lambda(I-P))^{-1}$.

2.3 Poisson clouds of loops

以下, $\beta > 0$ とする. ループ空間 Γ 上の σ-有限測度 $\beta\mu^{loop}$ を intensity 測度とする Γ 上のポアソン点過程 $\Pi_{\beta\mu^{loop}}$ を考える. ([6] では Poisson clouds of loops とよばれている.) $\Pi_{\beta\mu^{loop}}$ は配置空間 $Q(\Gamma)$ 上の確率測度である. ラプラス変換は (1) にあるように

$$E_{\Pi_{\beta\mu^{loop}}}\left[\exp(-\langle \omega, \Phi \rangle)\right] = \exp\left(-\beta \int_\Gamma (1 - e^{-\Phi(\gamma)}) \mu^{loop}(d\gamma)\right)$$

となる. ここで, $\omega = \sum_i \delta_{\gamma_i} \in Q(\Gamma)$, $\Phi : \Gamma \to [0,\infty]$ である.

前節の Feynman-Kac 型公式 (4) より $\Phi_V = \sum_{x \in S} V(x) L_x$ のラプラス変換は

$$\begin{aligned} E_{\Pi_{\beta\mu^{loop}}}\left[\exp(-\langle \omega, \Phi_V \rangle)\right] &= \exp\left(-\beta \int_\Gamma (1 - e^{-\Phi_V(\gamma)}) \mu^{loop}(d\gamma)\right) \\ &= \exp\left(-\beta \log \det(I + GV)\right) \qquad (5) \\ &= \det(I + GV)^{-\beta} \end{aligned}$$

となる．以下で見るように，この関係式 (5) と α-行列式点過程のラプラス変換がつながることがわかる．

2.4 α-行列式点過程のポアソン表現 I

$\omega = \sum_i \delta_{\gamma_i} \in Q(\Gamma)$ を loop 配置とする．Occupation field $\mathcal{L}_x : Q(\Gamma) \to [0, \infty]$ を

$$\mathcal{L}_x(\omega) = \langle \omega, L_x \rangle = \sum_i L_x(\gamma_i)$$

と定義すると，Y. Le Jan によって以下のことが知られている [2].

$$(\mathcal{L}_x)_{x\in S} \text{ under } \Pi_{\frac{1}{2}\mu^{loop}} \overset{d}{=} \left(\frac{1}{2}\varphi_x^2\right)_{x\in S} \text{ under } \mathbb{P}_{\mathrm{GFF}}$$

ただし，$\mathbb{P}_{\mathrm{GFF}}$ はガウス自由場 $(\varphi_x, x \in S)$ の確率法則である．つまり，共分散がグリーン関数 $\mathbb{E}_{\mathrm{GFF}}[\varphi_x\varphi_y] = g(x,y)$ で与えられるガウス場である．

積分核 $K(x,y) = g(x,y)$ $(x, y \in S)$ を考える．$g(x,y) \geq 0$ であるから $\alpha > 0$ のとき $\det_\alpha(K(x_i,x_j))_{i,j=1}^n$ は常に非負である．よって，S 上の α-行列式点過程は存在して，そのラプラス変換は

$$E_{\mu_G^{(\alpha)}}\left[\exp(-\langle \xi, f\rangle)\right] = \det\left(I + \alpha G(1-e^{-f})\cdot\right)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad f \in C_c^+(S)$$

で与えられる．(5) との類似性に着目して以下の結果を得る．

定理 1. $\alpha > 0$ とする．$\mu_G^{(\alpha)}$ を *Green* 作用素 G に付随する α-行列式点過程とする．ループ配置 $\omega = \sum_i \delta_{\gamma_i} \in Q(\Gamma)$ に対して定まる *occupation field* を $\mathcal{L}(\omega) = (\mathcal{L}_x(\omega), x \in S)$ とすると，

$$\mu_G^{(\alpha)}(\cdot) = E_{\Pi_{\alpha^{-1}\mu^{loop}}}[\Pi_{\alpha\mathcal{L}}(\cdot)].$$

つまり，$\mu_G^{(\alpha)}$ はランダム *intensity* 測度 $\alpha\mathcal{L}$ をもつ S 上のポアソン点過程である．$\mathcal{L}$ は *intensity* 測度 $\alpha^{-1}\mu^{loop}$ をもつ Γ 上のポアソン点過程から定まるランダム測度である．

証明．$\beta = \alpha^{-1}$, $V = \alpha(1-e^{-f})$ とおく．定義より $\langle \omega, \Phi_V\rangle = \sum_{x\in S} \alpha(1-e^{-f(x)})\mathcal{L}_x(\omega)$ となるから，

$$E_{\Pi_{\alpha\mathcal{L}}}[\exp(-\langle \xi, f\rangle)] = \exp(-\langle \omega, \Phi_V\rangle).$$

よって，(5) より

$$E_{\Pi_{\alpha^{-1}\mu^{loop}}}\left[E_{\Pi_{\alpha\mathcal{L}}}[\exp(-\langle \xi, f\rangle)]\right] = \det(I + G(\alpha(1-e^{-f})\cdot))^{-\alpha^{-1}}$$

となり，ラプラス変換の一意性より結論を得る． □

2.5 α-行列式点過程のポアソン表現 II

$\alpha > 0$ のかわりに $t > 0$ を用いて以下のようなパラメータでラプラス変換を考える：

$$\mathscr{L}_{\mu_{tG}^{(1/t)}}(f) = \det(I + G(1 - e^{-f}))^{-t} \quad (t > 0).$$

右辺の形より明らかに $\mu_{tG}^{(1/t)}$ は無限分解可能である．また，定理 1 より

$$\mu_{tG}^{(1/t)}(\cdot) = E_{\Pi_{t\mu^{loop}}}[\Pi_{\mathcal{L}}(\cdot)].$$

時空間 $(0, \infty) \times \Gamma$ 上の配置 $\omega = \sum_i \delta_{(t_i, \gamma_i)}$ に対して

$$\mathcal{L}_t(\omega) = \sum_{t_i \le t} L(\gamma_{t_i}) \quad \text{(occupation field before time } t)$$

と定義すると，

$$\mathcal{L} \text{ under } \Pi_{t\mu^{loop}} \stackrel{d}{=} \mathcal{L}_t \text{ under } \Pi_{dt\otimes\mu^{loop}}$$

となる．ただし，$\Pi_{dt\otimes\mu^{loop}}$ は時空間 $(0, \infty) \times \Gamma$ 上の $dt \otimes \mu^{loop}$ を intensity 測度 とするポアソン点過程である．これより，

$$\mu_{tG}^{(1/t)} = E_{\Pi_{dt\otimes\mu^{loop}}}[\Pi_{\mathcal{L}_t}] = E_{\Pi_{dt\otimes\mu^{loop}}}[*_{t_i \le t}\Pi_{L(\gamma_{t_i})}]$$

となる．$*_{t_i \le t}$ は点過程の畳み込みをあらわす．

ループ $\gamma \in \Gamma$ に対して，$[0, \tau(\gamma)]$ 上のポアソン点過程から写像

$$Q([0, \tau(\gamma)]) \ni \sum_i \delta_{s_i} \mapsto \sum_i \delta_{\gamma(s_i)}$$

によって誘導される S 上の点過程を Π_γ とすると，$\Pi_{L(\gamma)} \stackrel{d}{=} \Pi_\gamma$ であるから，

$$\mu_{tG}^{(1/t)} = E_{\Pi_{dt\otimes\mu^{loop}}}[*_{t_i \le t}\Pi_{\gamma_{t_i}}]$$

となる．よって，$\Pi_{dt\otimes\mu^{loop}}$ のもとで，時刻 t 以下に発生する S 上のループ γ 上のポアソン点をすべて集めたものが点過程 $\mu_{tG}^{(1/t)}$ の一実現であるという描像が得られる．

2.6 注意

空間 S は有限集合でそれ上のループ空間を考えて，S 上の α- 行列式点過程をポアソン点過程を用いて表現した．この方法は 2 次元以上の一般の連続空間にはそのままでは拡張できない．

$D \subset \mathbb{R}^d$ で境界 ∂D を吸収壁とするブラウン運動 $(B_t)_{t\ge 0}$ を考える．非再帰的であるから Green 関数 $G(x, y)$ は存在する．よって，上と同様に連続なループ空間上にループ測度は定義されている [1]．非負関数 $f : D \to [0, \infty)$ に対して occupation time を $L_t(f) = \int_0^T f(B_t)dt$ と定義すると

$$\mathbb{E}_{\mu^{loop}}[L_t(f)^n] = (n-1)! \int_{D^n} G(x_1, x_2)f(x_2)G(x_2, x_3)\cdots G(x_n, x_1)f(x_1)dx_1 \ldots dx_n$$

が成り立つ．D が 1 次元のときのみ，$L_t(f)$ は μ^{loop}-局所可積分で，G は局所トレース族に属する．よって，α-行列式点過程 $\mu_G^{(\alpha)}$ $(\alpha > 0)$ が定義されて，ループ測度によるポアソン表現も同様に成り立つ．3 次元以下の場合，$L_t(f)$ は μ^{loop}-局所二乗可積分で，D が有界ならば G は Hilbert-Schmidt 族，D が非有界ならば局所 Hilbert-Schmidt 族に属する．Le Jan はこの場合に，occupation field の繰り込みを議論することにより，ラプラス変換が 2-regularized determinant となるランダム場について論じている [2].

参考文献

[1] G. Lawler and W. Werner, The Browinian loop soup, Probab. Theory Relat. Fields 128 (2004), 565–588.

[2] Y. Le Jan, Markov paths, loops and fields, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour, Lec. Notes in Math. **2026**, Springer, Heidelberg, 2011.

[3] T. Shirai, Remarks on the positivity of α-determinants, Kyushu J. Math. **61** (2007), 169–189.

[4] T. Shirai, Fermion and boson point processes and related topics, RIMS 研究集会「量子場の数理とその周辺」, to appear in RIMS Kôkyûroku (2014).

[5] T. Shirai and Y. Takahashi, Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: fermion, Poisson and boson point processes, J. Funct. Anal. **205** (2003), 414–463.

[6] A.S. Sznitman, Topics in occupation times and Gaussian free fields, Zurich Lectures in Advanced Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2012.